11 ЛЕКЦИЯ

Инерциалды емес санақ жүйелеріндегі қозғалыс

Бұл тақырыпта біз инерциялық емес санақ жүйелеріндегі денелердің қозғалысын, яғни инерциялық жүйеге қатысты қозғалатын немесе айналатын жағдайларын қарастыратын боламыз. Классикалық механикада Ньютонның принциптеріне негізделген инерциялық санақ жүйесі қозғалмайтын немесе түзу және бірқалыпты қозғалатын болып есептеледі. Мұндай жүйеде дененің күші мен үдеуі $\vec{F} = m\vec{a}$ қарапайым қатынасымен байланысты, мұндағы $\vec{F}$ - күш, m - дене массасы, $\vec{a}$ - үдеу. Дегенмен, нақты жағдайларда көптеген санақ жүйелері инерциалды емес. Мысалы, дене айналмалы немесе үдеумен қозғалатын болса санақ жүйесі инерциялық емес болады. Мұндай жүйелерде дененің күші мен үдеуін Ньютонның қозғалыс теңдеулері арқылы жай ғана байланыстыруға болмайды. Яғни, біз осы уақытқа дейін кез-келген механикалық жүйенің қозғалысын инерциалық санақ жүйелерінде қарастырдық. Сыртқы өрістің әсерінен қозғалған бір ғана инерциалды санақ жүйесіндегі Лагранж функциясы:

$$L_0 = \frac{mv_0^2}{2} - U \tag{1}$$

және оның қозғалыс теңдеуі:

$$m\frac{dv_0}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \tag{2}$$

Енді бөлшектің инерциалды емес жүйесіндегі қозғалыс теңдеуі қалай жазылады деген мәселені алатын болсақ, бұл жерде де механиканың ең аз әсер принципінің кез-келген санақ жүйесінде қолданылуына шек қойылмауын пайдалана аламыз және Лагранж теңдеуін жазамыз:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}. \tag{3}$$

Бірақ Лагранж функциясын табу үшін L_0 функциясына сәйкесінше түрлендірулер енгізу қажет болады.

Осы түрлендірулерді жасау үшін екі қадам жасау керек. Біріншіден: K_0 инерциалды санақ жүйесіне қатысты ілгерілемелі $\vec{V}(t)$ жылдамдықпен қозғалатын K' санақ жүйесін аламыз. Осы екі K_0 және K' санақ жүйелеріне бөлшектің $\vec{v}_0$ және $\vec{v}\,'$ жылдамдықтарының арасындағы байланыс:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}\,' + \vec{V}(t) \tag{4}$$

Осы өрнекті қолданып K' санақ жүйесіндегі Лагранж функциясын жазатын болсақ:

$$L' = \frac{m\vec{v}'^2}{2} + m\vec{v}\vec{V} + \frac{m\vec{V}^2}{2} - U \qquad (5)$$

$V^2(t)$ – берілген уақыт функциясы болып табылады. Бұл басқа бір функцияның уақыт бойынша толық туындысы ретінде жазыла алатындықтан, осыған қатысты үшінші мүшені ескерусіз қалдыруға болады.

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt};$$

мұндағы $\vec{r}'$ – бөлшектің санақ K' санақ жүйесіндегі радиус-векторы екенін ескерсек:

$$m\vec{V}(t)\vec{v}' = m\vec{V}\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{V}\vec{r}'\right) - m\vec{r}'\frac{d\vec{V}}{dt}. \qquad (6)$$

Соңында (5)–ті қайта жазатын болсақ:

$$L' = \frac{m\vec{v}'^2}{2} - m\vec{W}(t)\vec{r}' - U. \qquad (7)$$

Мұндағы $\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ – K' санақ жүйесінің ілгерілемелі қозғалысының үдеуі болып табылады. (7) – ні қолданып Лагранждың қозғалыс теңдеуін былай жазуға болады:

$$\frac{d}{dt}m\vec{v}' = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}'} - m\vec{W}(t) \qquad (8)$$

$$m\frac{d\vec{v}'}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}'} - m\vec{W}(t) \qquad (9)$$

Яғни (9) санақ жүйесінің үдетілген ілгерілемелі қозғалысы бөлшектің қозғалыс теңдеуіне ықпалын көрсетеді. Ол біртекті күш өрісінің пайда болуы арқылы түсіндіріледі. Сонымен қатар бұл өрістегі әсер етуші күш бөлшектің массасын $\vec{W}$ үдеуіне көбейткенге тең және осы үдеуге қарама-қарсы бағытталған.

Екінші қадамды былай жазуға болады, яғни K' жүйесімен бастапқы нүктесі ортақ, бірақ оған қатысты $\vec{\Omega}(t)$ бұрыштың жылдамдықпен айналатын K санақ жүйесін енгіземіз. Ал K_0 инерциалды жүйесіне қатысты осы K жүйесі ілгерілемелі де және айналмалы да қозғалыс жасайды.

Бөлшектің K' санақ жүйесіндегі $\vec{v}'$ жылдамдығы осы бөлшектің K жүйесіне қатысты $\vec{v}$ жылдамдығымен оның K жүйесімен бірге айналуының $\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]$ жылдамдығының қосындысынан тұрады:

$$\vec{v}' = \vec{v} + \left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] \qquad (10)$$

бөлшектің $\vec{r}'$ және $\vec{r}$ K және K' жүйелерінде радиус-векторлары бір-бірмен сәйкес болады. Осы өрнекті Лагранж функциясына арналған өрнекке қоямыз:

$$L = \frac{mv^2}{2} + m\vec{v}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] + \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]^2 - m\vec{W}\vec{r}' - U \qquad (11)$$

Бұл бөлшектің қалауымызша алған инерциалды емес санақ жүйесіндегі Лагранж функциясының жалпы түрі болып табылады. Санақ жүйесінің айналуы, Лагранж функциясындағы ерекше бір мүше – бөлшектің сызықты жылдамдығының пайда болуына алып келетінін айта кетуге болады.

Енді Лагранж теңдеуіне енетін туындыларды есептейік.

$$dL = m\vec{v}d\vec{v} + md\vec{v}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] + m\vec{v}\left[\vec{\Omega}d\vec{r}\right] + m\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]\left[\vec{\Omega}d\vec{r}\right] -$$

$$-m\overrightarrow{W}d\vec{r} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}d\vec{r} = m\vec{v}d\vec{v} + md\vec{v}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] + md\vec{r}\left[\vec{v}\vec{\Omega}\right] +$$

$$+m\left[\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]\vec{\Omega}\right]d\vec{r} - m\overrightarrow{W}d\vec{r} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}d\vec{r}. \qquad (12)$$

Енді $d\vec{v}$ және $d\vec{r}$ бойынша мүшелерді жинақтаймыз:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + m\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right], \qquad (13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = m\left[\vec{v}\vec{\Omega}\right] + m\left[\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]\vec{\Omega}\right] - m\vec{W} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}, \qquad (14)$$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$ теңдеуіне қоятын болсақ

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m\vec{W} + m\left[\vec{r}\dot{\vec{\Omega}}\right] + 2m\left[\vec{v}\vec{\Omega}\right] + m\left[\vec{\Omega}\left[\vec{r}\vec{\Omega}\right]\right]. \qquad (15)$$

Санақ жүйесінің айналуымен пайда болатын «инерция күштері» үш бөліктен тұрады деп айтуға болады. Мысалы $m\left|\vec{r}\dot{\vec{\Omega}}\right|$ – айналудың бір текті еместігімен пайда болатын күш. Қалған екеуі бір текті айналу кезінде де пайда болады. $2m\left|\vec{v}\vec{\Omega}\right|$ – *Кориолис күші* деп аталады. Бұл басқа күштер сияқты емес, яғни бөлшектің жылдамдығына тәуелді болмайды. $m\left|\vec{\Omega}\left|\vec{r}\vec{\Omega}\right|\right|$ – *центрден тепкіш күш* деп аталады. Мәні бойынша ол $m\rho\Omega^2$, мұндағы ρ – бөлшектің орнынан айналу өсіне дейінгі арақашықтықты көрсетеді. Бағыты бойынша $\vec{r}$ арқылы өтетін жазықтыққа бағытталған, ал айналу өсіне (яғни $\vec{\Omega}$ бағытына) перпендикуляр болады. Координаттар жүйесінің біртекті айналып отырған жағдайын қарастырайық. Яғни ілгерілемелі үдеу $\vec{W}=0$; $\vec{\Omega}=const$ болса, Лагранж функциясы:

$$L=\frac{mv^2}{2}+m\vec{v}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]+\frac{m}{2}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]^2-U \tag{16}$$

ал қозғалыс теңдеуі:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}+2m\left[\vec{v}\vec{\Omega}\right]+m\left[\vec{\Omega}\left[\vec{r}\vec{\Omega}\right]\right] \tag{17}$$

Бөлшектің энергиясын есептеу үшін**:**

$$\vec{P}=\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}=m\vec{v}+m\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] \tag{18}$$

$$E=pv-L$$

$$E=\frac{mv^2}{2}-\frac{m}{2}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]^2+U\,. \tag{19}$$

Энергияға арналған (19) өрнекте жылдамдық бойынша сызықты мүше жоқ екеніне көңіл аударайық. Санақ жүйесінің айналуы бұл өрнекте тек бөлшектің координатына және бұрыштың жылдамдығының квадратына тәуелді қосымша мүшенің пайда болуына әкеліп соғады. Осы қосымша $-\frac{m}{2}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]^2$ энергиясы *центрден тепкіш потенциалдық энергия* деп аталады.

Біртекті айналып тұрған санақ жүйесіне қатысты алған бөлшектің жылдамдығы $\vec{v}$; осы бөлшектің инерциалды санақ жүйесі K_0-ға қатысты жылдамдығы $\vec{v}_0$ жылдамдығымен былай байланысты:

$$\vec{v}_0=\vec{v}+\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] \tag{20}$$

Сондықтан K жүйесіндегі импульсі $\vec{p}$ оның K_0 жүйесіндегі импульсі $\vec{p}_0=m\vec{v}_0$ сәйкес келеді. Сонымен қатар моменттері де сәйкес болады.

$$\vec{M}_0=[\vec{r}\vec{p}_0] \text{ және } \vec{M}=[\vec{r}\vec{p}] \tag{21}$$

Ал K және K_0 жүйелеріндегі энергиялары әр түрлі болады. Сондықтан (20)-(19)-ға қойып:

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - mv_0\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] + U = \frac{mv_0^2}{2} + U - m\left[r\vec{v}_0\right]\vec{\Omega} \qquad (22)$$

Осындағы алғашқы екі мүше K_0 жүйесінің энергиясы E_0 білдіреді, ал үшінші мүшесі импульс моменті, сондықтан:

$$E = E_0 - \vec{M}\vec{\Omega}. \qquad (23)$$

Осы формуламен координаттар жүйесінің біртекті айналмалы қозғалысқа өткен кездегі энергияның түрленуін есептеуге болады.

Тақырып барысында инерциялық емес санақ жүйелерімен жұмыс істеуге мүмкіндік беретін принциптер мен әдістерді қарастырдық. Біз сондай-ақ центрден тепкіш күш, Кориолис күші және айналмалы платформадағы динамика сияқты инерциялық емес жүйелердегі қозғалыстың энергиясының түрленуін бір бөлшек үшін қарастырдық.

Өзін-өзі бақылауға арналған тапсырмалар мен сұрақтар

1. Центрден тепкіш күш деген не?
2. Центрден тепкіш потенциалдық энергияны қалай сипаттайды?
3. Жалған күштер табиғатын түсіндіріңіз.
4. Инерциялық емес санақ жүйесі дегеніміз не?
5. Қандай анықтамалық жүйелерді инерциялық деп санауға болады?
6. Инерциялық емес санақ жүйесінде қандай қозғалыс теңдеулері қолданылады?
7. Айналмалы санақ жүйесіндегі центрден тепкіш күш қозғалысқа қалай байланысты?
8. Кориолис күші дегеніміз не және ол инерциялық емес жүйелердегі қозғалысқа қалай әсер етеді?
9. Инерциялық емес санақ жүйесіндегі қозғалысқа қандай практикалық мысалдар мен қосымшалар жатады?
10. Жалған күш денеге әсер ететін нақты күштермен қалай байланысты?

Қолданылған әдебиет

1. N. Beissen, H. Quevedo. Lecture Course on Theoretical Mechanics. – Учебное пособие на английском языке под грифом УМО РУМС и МОН РК для студентов университетов по специальностям «Физика» и «Ядерная физика». Алматы, Қазақ университеті, 2017. 9,75 п.л.

2. М.Е. Абишев, Н.Ә. Бейсен. – Теориялық физиканың таңдаулы тараулары: оқу құралы. Алматы: Қазақ университеті, 2018 – 228 б.

3. Теориялық механика: оқулық / Н.Ә. Бейсен. – Алматы: Қазақ университеті, 2023. – 18,5 б.т. ISBN 978-601-04-6387-5